

## مساحت جانبی و کل منشور

به نام خدا

در این جلسه می‌توانیم دربارهٔ مناسبه مساحت منشورها با هم صحبت کنیم. وقتی صحبت از مساحت منشور میشه، دو تا مساحت مد نظر مونه:

مساحت جانبی و مساحت کل

حالا این دو تا چه تفاوتی با هم دارن؟

یه کاغذ بردارید، اونو لوله کنید تا شبیه یه استوانه بشه، الان شما یه استوانه دارید که سر و تهش بازه، در واقع فقط یه سطح جانبیه.

اگه مساحت این استوانه رو به دست بیارید، یعنی مساحت جانبی استوانه رو به دست آوردید.

حالا فرض کنید دو تا دایره می‌برید و سر و ته این استوانه رو می‌بندید. اگه مساحت این دو تا دایره رو به اون مساحت جانبی که قبلا حساب کرده بودید اضافه کنید، مساحت کل استوانه به دست میاد.

**مساحت جانبی منشور رو چطوری مناسبه کنیم؟**

اول باید ببینیم که سطح جانبی منشور از چه شکلی به وجود اومده.

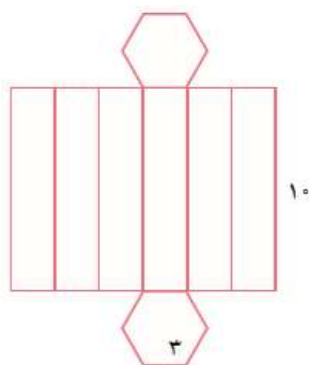
مثلا اگه منشور شما یه استوانه باشه، سطح جانبیش چه شکلی هست؟

مستطیل (اون استوانه ای که سافته بودید رو باز کنید تا ببینید که یک مستطیل درست میشه).

بعد از اینکه شکل سطح جانبی رو پیدا کردیم باید مساحتش رو حساب کنیم. یه وقتایی سطح جانبی فقط از یک مستطیل تشکیل شده و یه وقتایی باید مساحت چند تا شکل رو با هم جمع کنیم تا مساحت جانبی رو به دست بیاریم. با حل چند تا مثال این مطلب رو به طور کامل یاد می‌گیریم.

مثال:

۲- با شکل مقابل یک منشور درست کرده‌ایم. مساحت جانبی آن را پیدا کنید.



چون در اینجا مساحت جانبی رو از ما فواسته، با مساحت سر و ته شکل کاری نداریم. سطح جانبی ما از چه شکلی تشکیل شده؟ از ۶ تا مستطیل.

ابعاد مستطیلهای پنده؟ طول همشون برابر ۱۰ و عرضشون هم برابر ۳ هست.

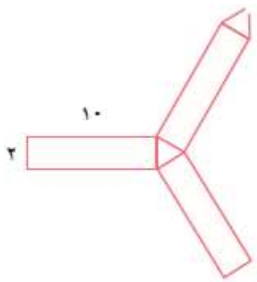
$$۳ \times ۱۰ = ۳۰ = \text{مساحت یکی از مستطیلهای}$$

۶ تا مستطیل داریم، بنابراین:

$$۶ \times ۳۰ = ۱۸۰ = \text{مساحت جانبی منشور}$$

از یه راه دیگه هم می‌تونیم مساحت جانبی رو به دست بیاریم، به جای اینکه مساحت ۶ تا مستطیل رو جداگانه حساب کنیم و با هم جمع کنیم، مساحت مستطیل بزرگ رو حساب کنیم. مستطیل بزرگ ابعادش ۱۰ و  $۱۸ = ۳ \times ۶$  هست، بنابراین:

$$۱۸۰ = ۱۰ \times ۱۸ = \text{مساحت جانبی منشور}$$



۶- شکل مقابل گسترده یک منشور را نشان می‌دهد.

مساحت جانبی منشور را پیدا کنید.

اینجا هم چون مساحت جانبی رو از ما خواسته، با سر و ته شکل کاری نداریم، سر و ته شکل پیه اینجا؟ دو تا مثلث، پس با اینا کاری نداریم.

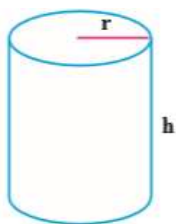
مساحت پی رو باید حساب کنیم؟ سه تا مستطیل به ابعاد ۲ و ۱۰

$$۲۰ = ۲ \times ۱۰ = \text{مساحت یکی از مستطیله}$$

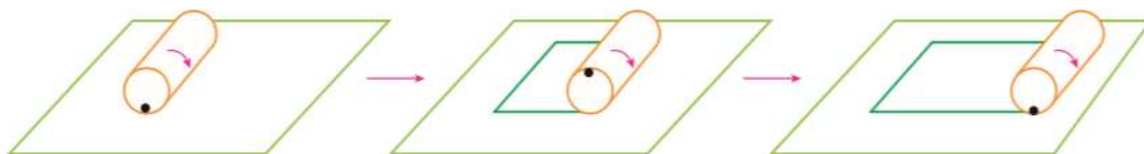
۳ تا مستطیل داریم، بنابراین:

$$۶۰ = ۳ \times ۲۰ = \text{مساحت جانبی منشور}$$

مساحت جانبی یک استوانه به ارتفاع  $h$  و شعاع  $r$  را به دست آورید:



می‌دونیم آگه این استوانه رو باز کنیم، یه مستطیل به وجود میاد:



این مستطیلی که به وجود اومده چه ابعادی داره؟

ارتفاع استوانه همون عرض مستطیل میشه که برابر  $h$  هست.

طول مستطیل برابر پی میشه؟ طول مستطیل برابر با محیط دایره میشه، یعنی  $2\pi r$

پس یه مستطیل داریم با ابعاد  $h$  و  $2\pi r$ .

مساحت مستطیل یا همون مساحت جانبی استوانه برابر  $2\pi r \times h = 2\pi r h$

بنابراین مطلب زیر رو به خاطر می‌سپاریم:

مساحت جانبی استوانه ای به ارتفاع  $h$  و شعاع دایره  $r$  برابر است با  $2\pi r h$



۲- یک غلتک روی زمین آسفالت شده باید ۴ بار غلت بزند تا سطح آن صاف شود.

اگر شعاع غلتک ۵۰ سانتی‌متر و ارتفاع استوانه آن ۱ متر باشد، برای آسفالت کردن سطح یک

کوچه به طول ۲۰ و عرض ۴ متر، این غلتک باید به طور تقریبی چند بار بچرخد؟

اول حساب می‌کنیم که آگه غلتک یه غلت بزنه چه مساحتی رو پوشش میده، مساحتی که

غلتک پوشش میده همون مساحت جانبی استوانه هست.

شعاع غلتک ۵۰ سانتیمتره، یعنی ۰/۵ متر، ارتفاع استوانه هم ۱ متر. طبق مطلبی که در قسمت قبل یاد گرفتیم، مساحت جانبی غلتک برابره با:

$$2\pi r h$$

که در اینجا  $h = 1$  و  $r = 0/5$ ، بنابراین:

$$2\pi r h = 2 \times 3.14 \times 0.5 \times 1 = 3.14$$

این شد مساحت جانبی غلتک یا همون مساحتی که غلتک توی یه بار غلت زدن پوشش میده.

حالا مساحت کوچه رو حساب می‌کنیم، طول کوچه ۲۰ متر و عرضش ۴ متره، بنابراین:

$$\text{مساحت کوچه} = 20 \times 4 = 80$$

اگه غلتک بفواد یه بار کوچه رو طی کنه چند بار باید غلت بزنه؟ باید مساحت کوچه رو بر مساحت جانبی غلتک تقسیم کنیم:

$$80 \div 3.14 = 25.47$$

پس اگه غلتک بفواد کوچه رو یکبار طی کنه باید  $25/47$  بار غلت بفوره. ولی صورت سوال به ما گفته باید ۴ بار غلت بزنه تا آسفالت صاف بشه، یعنی ۴ بار باید این مسیر رو طی کنه، بنابراین:

$$25.47 \times 4 = 101.88$$

۵- یک مخزن نفت به شکل استوانه‌ای است که شعاع قاعده آن ۳ متر و ارتفاعش ۵ متر است. می‌خواهیم بدنه خارجی و سقف آن را رنگ بزنیم. اگر هزینه رنگ کردن هر متر مربع ۳۰۰۰ تومان باشد، برای رنگ کردن این مخزن چقدر باید هزینه کرد؟

اول باید حساب کنیم که چه مساحتی رو باید رنگ بزنیم. گفته بدنه خارجی و سقف استوانه. یعنی مساحت جانبی و اون دایره بالایی.

مساحت جانبی استوانه به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۵ برابر است با:

$$2\pi r h = 2 \times 3.14 \times 3 \times 5 = 94.2$$

حالا باید مساحت سقف رو هم حساب کنیم، سقف یه دایره به شعاع ۳ متره، بنابراین مساحتش برابر همیشه با:

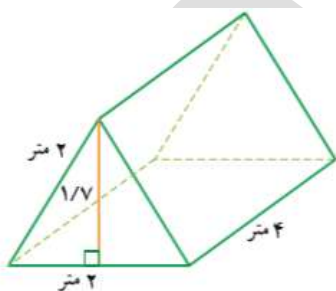
$$\pi r^2 = 3.14 \times (3)^2 = 28.26$$

پس مساحتی که باید رنگ بزنیم برابره با:

$$94.2 + 28.26 = 122.46$$

هزینه رنگ کردن هر متر مربع برابر ۳۰۰۰ تومانه، بنابراین هزینه کل:

$$122.46 \times 3000 = 367380$$



۴- یک چادر مسافرتی به شکل مقابل است. چند متر پارچه برای ساخت آن به کار رفته است؟

حجم این چادر چقدر است؟

وقتی می‌گه چند متر پارچه برای ساختش به کار رفته یعنی باید مساحت کل چادر رو حساب کنیم.

مساحت کل برابر همیشه با مساحت جانبی با اضافه سر و ته چادر.

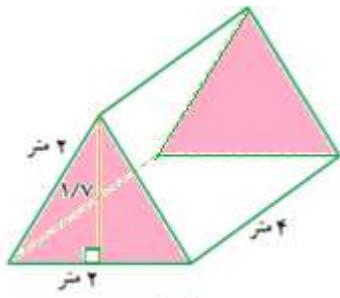
سر و ته چادر مثلثیایی هستند که ابعادشون توی شکل داده شده، بنابراین:

$$2 \times 1.7 = 3.4$$

خب دو تا از این مثلثا داریم، بنابراین:

$$2 \times 1.7 = 3.4$$

تا اینجا مساحت این دو قسمت که با رنگ صورتی نشون داده شده رو مناسبه کردیم:



چی باقی میمونه؟ مساحت جانبی. مساحت جانبی سه تا مستطیل به ابعاد ۲ و ۴ متر هست.

$$4 \times 2 = 8$$

سه تا از این مستطیلا داریم:

$$8 \times 3 = 24$$

مساحت جانبی رو هم به دست آوردیم، پس مساحت کل چادر یا مقدار پارچه مورد نیاز برای ساخت چادر برابر است با:

$$24 + 3.4 = 27.4$$

در قسمت بعد، از ما میم چادر رو فواسته، در جلسه قبل یاد گرفتیم که میعم منشور برابره با مساحت قاعده ضرب در ارتفاع، مساحت قاعده برابر با مساحت مثلثی هست که در شکل نشون داده شده:

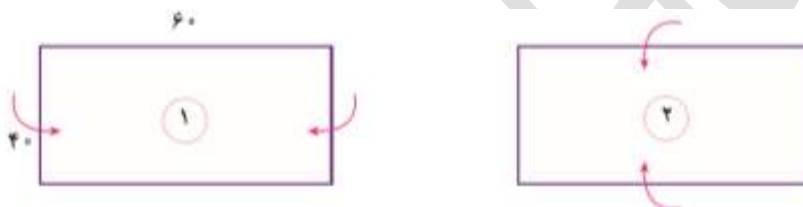
$$\text{ارتفاع هم که برابر با } 4 \text{ متره، بنابراین:} \\ \text{مساحت قاعده چادر} = (2 \times 1.7) \div 2 = 1.7$$

ارتفاع هم که برابر با ۴ متره، بنابراین:

$$\text{حجم چادر} = 1.7 \times 4 = 6.8$$

یه سوال :

فرض کنیم دو تا کاغذ مستطیل شکل هم اندازه داریم. یه بار این کاغذ رو از سمت ضلع کوچکترش لوله می‌کنیم و یه بار از سمت ضلع بزرگترش. به صورت زیر:



توی هر حالت یه استوانه به وجود میاد. سوال ما اینه:

با توجه به این که ابعاد هر دو کاغذ با هم برابره، آیا حجم استوانه‌هایی هم که درست کردیم با هم برابر هست یا نه؟

برای جواب دادن به این سوال میایم در هر حالت حجم استوانه رو به دست میاریم:

**حالت ۱:**

حجم استوانه برابر هست با :

$$v_1 = \pi r^2 h$$

$h$  ارتفاع استوانه‌ی هست که تولید میشه و در اینجا با توجه به شکل برابر ۴۰ هست.

$r$  شعاع دایره‌ایه که قاعده‌ی استوانه میشه، در اینجا  $r$  رو نداریم و باید به دستش بیاریم.

برای به دست آوردن  $r$  چکار کنیم؟



با توجه به شکل می‌دونیم محیط دایره‌ای که ایجاد شده برابر ۶۰ هست. یعنی:

$$2\pi r = 60$$

آگه به جای پی قرار بدیم ۳، داریم:

$$2 \times 3 \times r = 60$$

بنابراین ۲ برابر با :

$$r = 10$$

پس حجم استوانه در حالت ۱ برابر با:

$$v_1 = \pi r^2 h = 3 \times 10^2 \times 40 = 12000$$

به همین صورت حجم استوانه رو در حالت ۲ هم به دست میاریم:

حالت ۲:

حجم استوانه برابر هست با:

$$v_2 = \pi r^2 h$$

h ارتفاع استوانه‌ی هست که تولید میشه و در اینجا با توجه به شکل برابر ۶۰ هست.

r شعاع دایره‌ایه که قاعده‌ی استوانه میشه که باید مشابه قسمت قبل اون رو به دست بیاریم.

محیط دایره‌ای که ایجاد شده برابر ۴۰ هست. یعنی:

$$2\pi r = 40$$

آگه به جای پی قرار بدیم ۳، داریم:

$$2 \times 3 \times r = 40$$

بنابراین ۲ برابر با :

$$r = 6.6$$

پس حجم استوانه در حالت ۲ برابر با :

$$v_2 = \pi r^2 h = 3 \times 6.6^2 \times 60 = 7840.8$$

همینطور که می بینیم حجم استوانه هایی که به وجود اومد با هم متفاوت.

از این نکته در جاهای مختلف همیشه استفاده کرد. کجاها مثلا؟

مثلا فرض کنید که یه کارفونه داریم و با استفاده از ورقه های فلزی، مفرزهای استوانه ای شکل برای نگهداری آب تولید می کنیم. برای اینکه مفرزهای تولید شده ظرفیت بیشتری داشته باشن، ورقه های فلزی رو از قسمت عرضشون لوله می کنیم ( با توجه به مطلبی که در این قسمت یاد گرفتیم )

اگه صاحب یه کارفونه مثل ما ریاضیدان نباشه، مفرزهای تولیدش ممکنه حجم کمی داشته باشن 😊

آموزش گام به گام ریاضی چهارم تا دهم در سایت:

[www.riazibaham.ir](http://www.riazibaham.ir)

و کانال های @RiaziBaHam و @RiaziBaHam7

برای دریافت جزوات سایر پایه ها، تمرینهای حل شده و نمونه سوالات

امتثانی حل شده، به "ریاضی با هم" پیوندید.